23　軌跡と領域

193

x 軸に接する円の半径は$|b|$だから，$\sqrt{a^2+(b-2)^2}=|b|+1$

$b<0$のとき

$\sqrt{a^2+(b-2)^2}=-b+1$

両辺を 2 乗し，整理すると，$b=\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}$

ところが，$\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}>0$ より，$\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}$ は$b<0$を満たさない。よって，不適

$b=0$ のとき

$\sqrt{a^2+4}=1$

ところが$\sqrt{a^2+4}\geq 2$ となり矛盾。よって，不適

$b>0$ のとき

$\sqrt{a^2+(b-2)^2}=b+1$

両辺を 2 乗し，整理すると，$b=\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}>0$ より，$\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}$ は$b>0$ を満たす。

よって，中心 P が描く図形の方程式は$y=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}$

194

2 交点 A,B の座標

$y=\frac{1}{2}x$ より，$x=2y$　・・・①

①を$(x-3)^2+(y-3)^2=9$ に代入し，y について整理すると，$5y^2-18y+9=0$

左辺を因数分解すると，$(5y-3)(y-3)=0$　$\therefore y=\frac{3}{5},\ 3$

これと①より，2 交点 A,B の座標は$\left(\frac{6}{5},\ \frac{3}{5}\right),\ (6,\ 3)$　・・・②

△PAB の重心として定義できない点

点 P の座標が②のとき△PAB が定義できない。

したがって，$\left(\dfrac{\frac{6}{5}+\frac{6}{5}+6}{3},\ \dfrac{\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+3}{3}\right)$と$\left(\dfrac{\frac{6}{5}+6+6}{3},\ \dfrac{\frac{3}{5}+3+3}{3}\right)$

すなわち$\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$と$\left(\dfrac{22}{5},\ \dfrac{11}{5}\right)$は△PAB の重心として定義できない。　・・・③

点 P の座標

$x^2+y^2=9$ 上の点は，$(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$と表せることと，

$(x-3)^2+(y-3)^2=9$ は $x^2+y^2=9$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に 3 だけ平行移動した円の方程式であることから，$(x-3)^2+(y-3)^2=9$ 上の点 P を θ を用いて表すと，

$\mathrm{P}(3\cos\theta+3,\ 3\sin\theta+3)$　・・・④

点 G の軌跡

△PAB の重心 G の座標を$(x,\ y)$とすると，②，④より，

$$(x,\ y)=\left(\dfrac{\frac{6}{5}+6+3\cos\theta+3}{3},\ \dfrac{\frac{3}{5}+3+3\sin\theta+3}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{17}{5}+\cos\theta,\ \frac{11}{5}+\sin\theta\right)$$

$$\therefore\left(x-\frac{17}{5},\ y-\frac{11}{5}\right)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

これと，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より，

点 G の軌跡は$\left(x-\dfrac{17}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{11}{5}\right)^2=1$

ただし，③より，2 点$\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$，$\left(\dfrac{22}{5},\ \dfrac{11}{5}\right)$を除く。

195

交点の座標を$(X,\ Y)$とすると，$(X,\ Y)$は，

$(a-1)(X+1)-(a+1)Y=0$　・・・①　$aX-Y-1=0$　・・・②　を満たす。

①の左辺と②より，

$$\begin{aligned}(a-1)(X+1)-(a+1)Y&=aX+a-X-1-aY-Y\\&=(aX-Y-1)-X+a(1-Y)\\&=-X+a(1-Y)\end{aligned}$$

$\therefore X+a(Y-1)=0$　・・・③

(i) $X\neq 0$ のとき

②より，$a=\dfrac{Y+1}{X}$

これを③に代入し，整理すると，$\dfrac{X^2+Y^2-1}{X}=0$

$\therefore X^2+Y^2=1$　ただし，$(X,\ Y)=(0,\ \pm 1)$を除く

(ii) $X=0$ のとき

②より，$Y=-1$

これと③より，$a=-1$

よって，$(X,\ Y)=(0,\ -1)$を通る。

(i)，(ii)より，$l_1,\ l_2$ の交点の軌跡は$x^2+y^2=1$　ただし，$(x,\ y)=(0,\ 1)$を除く

196

(1)

$y=mx$ を $(x-4)^2+y^2=4$ に代入し，x について整理すると，$(m^2+1)x^2-8x+12=0$

異なる 2 点 P,Q の x 座標は$(m^2+1)x^2-8x+12=0$ の解だから，

判別式を D とすると，$D>0$

これと，$\dfrac{D}{4}=16-12(m^2+1)=4(1-3m^2)$より，$1-3m^2>0$　$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{3}<m<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2)

R の座標を$(X,\ Y)$，2 点 P,Q の x 座標を$\alpha,\ \beta$ とすると，$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　・・・①

$\alpha,\ \beta$ は$(m^2+1)x^2-8x+12=0$ の解だから，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=\dfrac{8}{m^2+1}$　・・・②

①，②より，$X=\dfrac{4}{m^2+1}$　・・・③

$(X,\ Y)$は$y=mx$ 上の点より，$Y=mX$

これと，③より，$X\neq 0$ だから，$m=\dfrac{Y}{X}$　・・・④

③より，$(m^2+1)X-4=0$

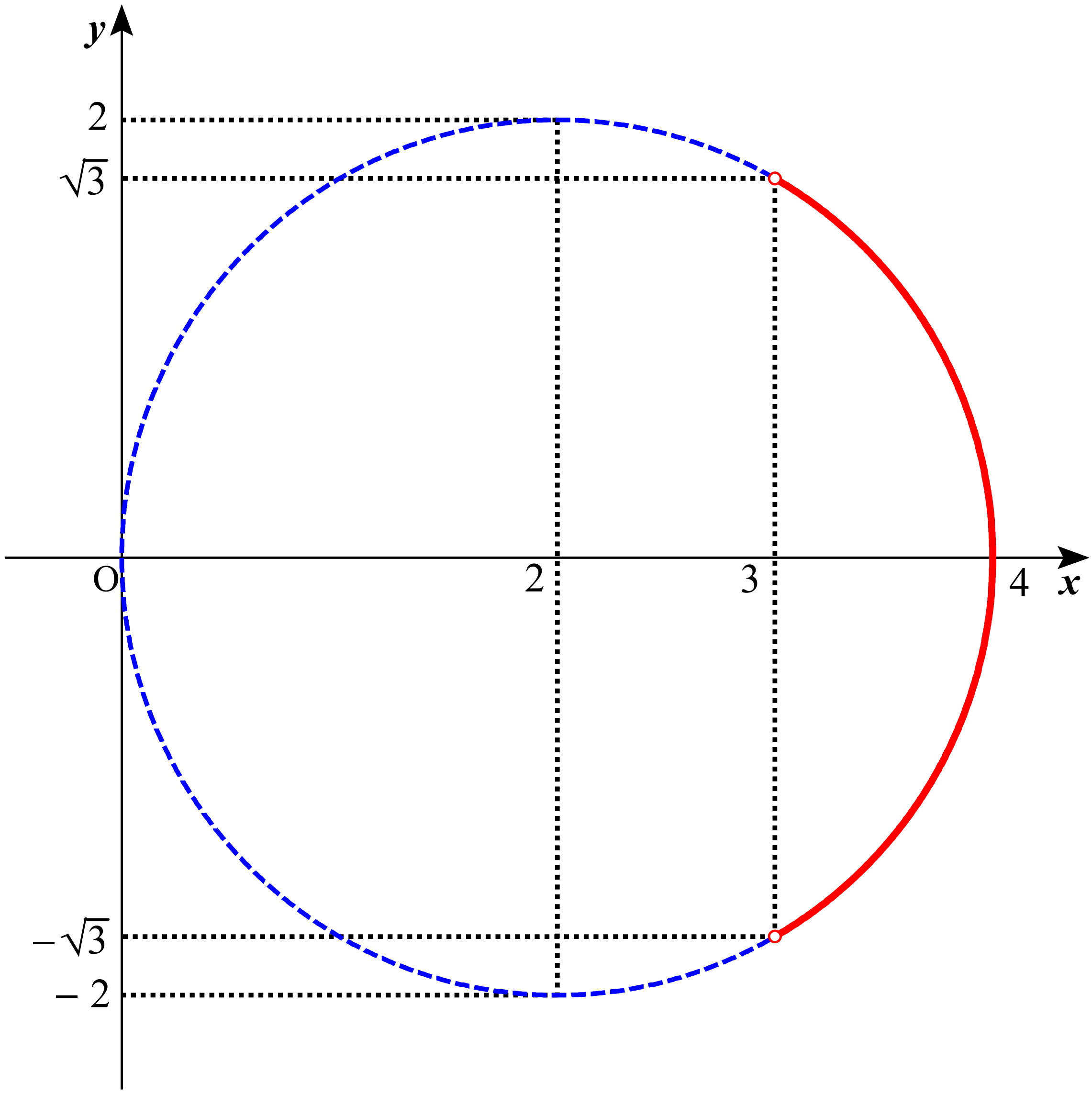
これに④を代入し整理すると，$\dfrac{(X-2)^2+Y^2-4}{X}=0$　$\therefore (X-2)^2+Y^2=4$　・・・⑤

また，(1)より，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<m<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ だから，$1\leq m^2+1<\dfrac{4}{3}$　すなわち$\dfrac{3}{4}<\dfrac{1}{m^2+1}\leq 1$

よって，③で，$3<X=\dfrac{4}{m^2+1}\leq 4$　・・・⑥

ゆえに，⑤と⑥より，R の軌跡は$(x-2)^2+y^2=4$　ただし，$3<x\leq 4$

R の軌跡は赤色実線部分，すなわち $(x-2)^2+y^2=4$ （$3<x\leq 4$） の部分

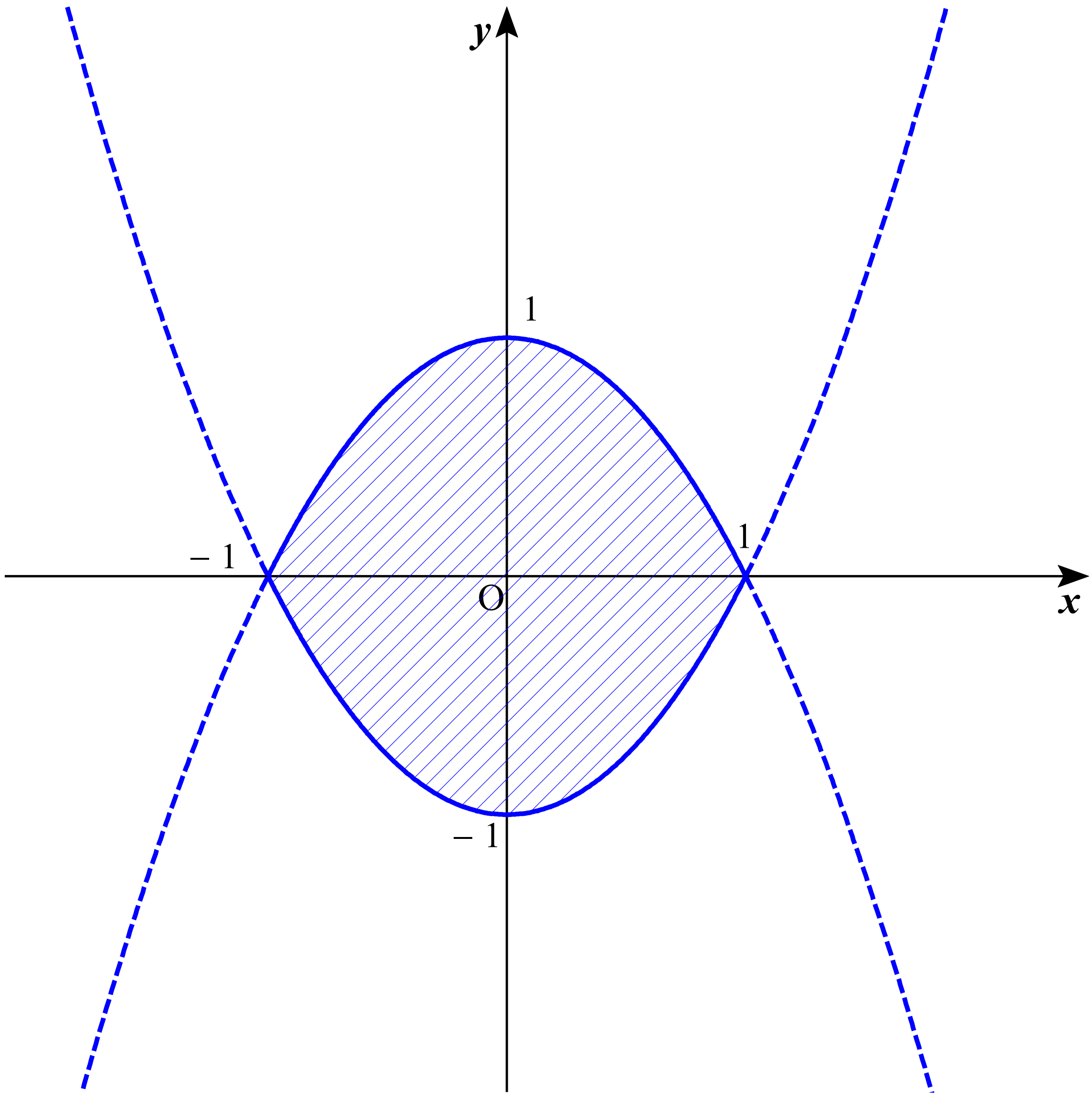


197

(1)

$-\left(-x^2+1\right) \leq y \leq -x^2+1$　すなわち $x^2-1 \leq y \leq -x^2+1$

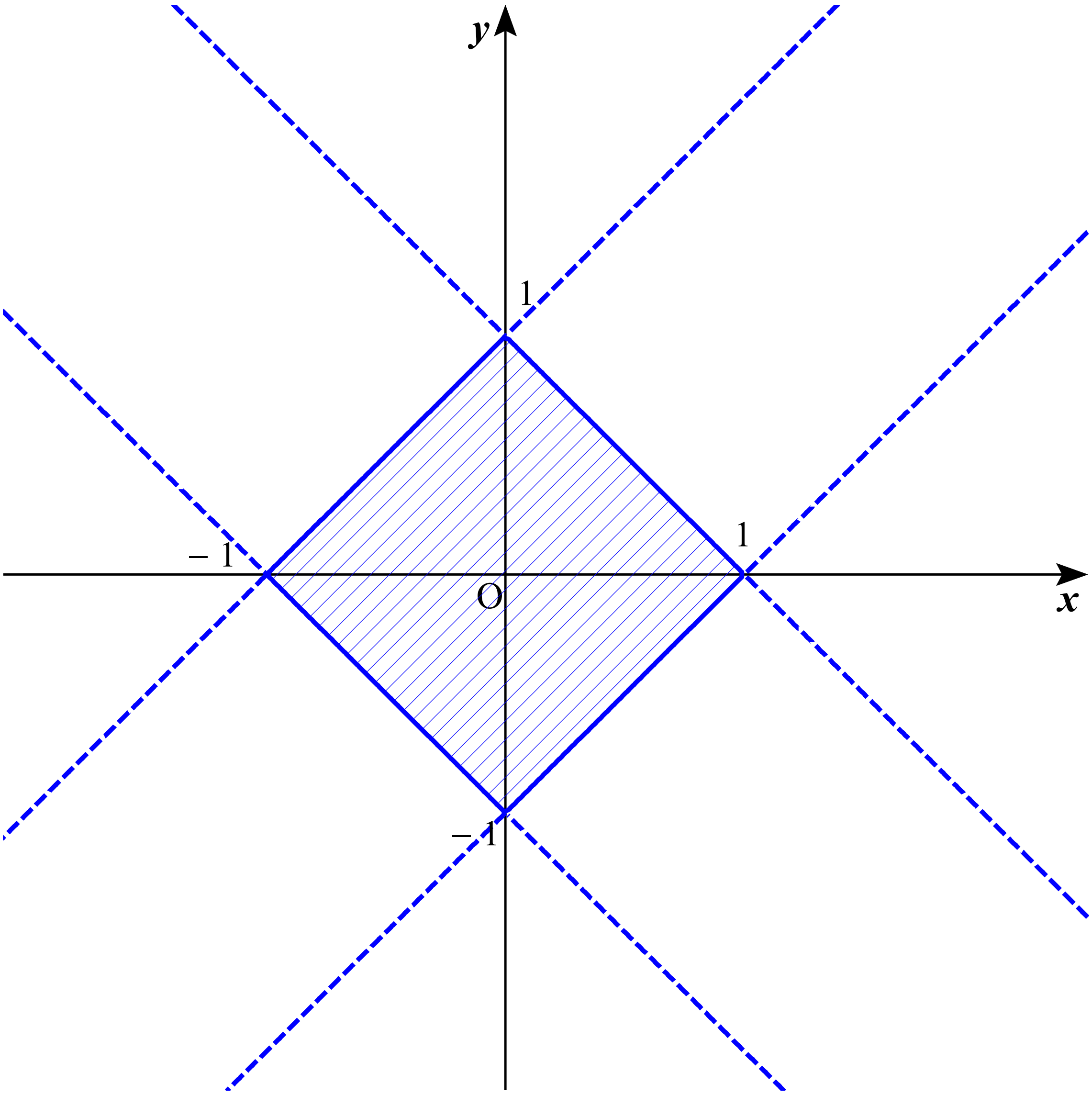
境界線を含む



(2)

$$|x|+|y|\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\le 1 & (x\ge 0,\ y\ge 0) \\ x-y\le 1 & (x\ge 0,\ y<0) \\ -x-y\le 1 & (x<0,\ y<0) \\ -x+y\le 1 & (x<0,\ y\ge 0) \end{cases}$$

境界線を含む



(3)

(1)より，$|y| \leq -x^2+1$ の表す領域は x 軸および y 軸に関して対称である。

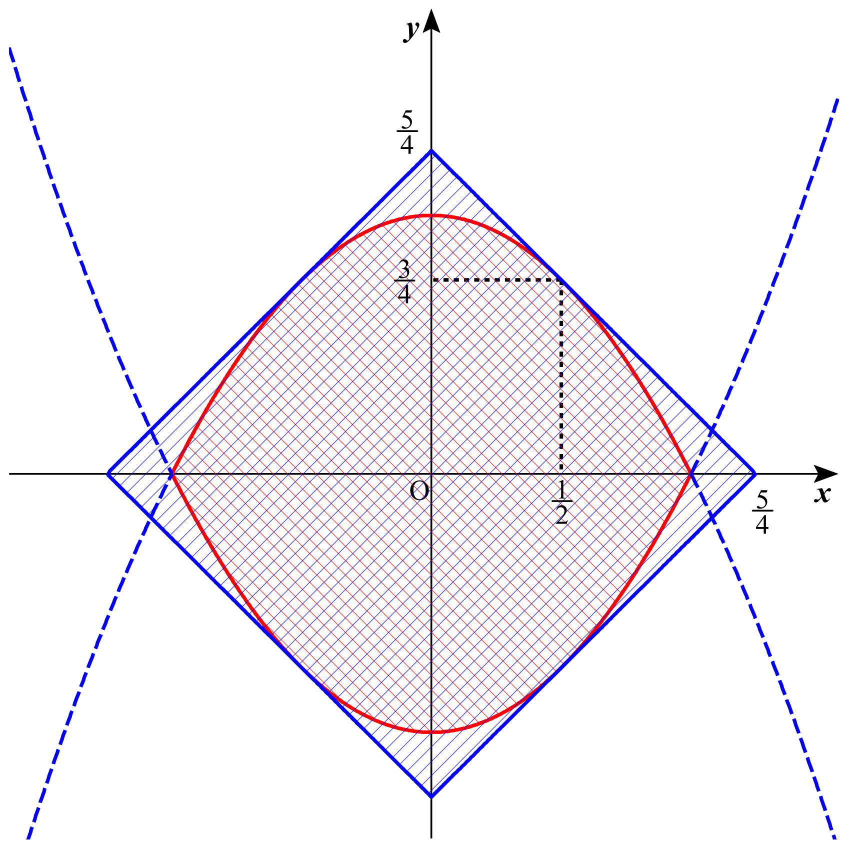
(2)より，$|x|+|y| \leq k$ の表す領域は x 軸および y 軸に関して対称である。
したがって，$x \geq 0,\ y \geq 0$ において $y \leq -x^2+1$ の表す領域が $x+y \leq k$ の表す領域に含まれるための k の必要十分条件を求めればよい。
このとき，必要十分条件を満たす k は $y=-x^2+1$ と $x+y=k$ すなわち $y=-x+k$ が $0 \leq x \leq 1$ において接するとき最小値をとるが，これは $y=-x^2+1$ に $y=-x+k$ を代入し，整理して得られる x の2次方程式 $x^2-x+k-1=0$ が $0 \leq x \leq 1$ において重解をもつときの k の値と等しい。そこで，このときの k の値を求めてみる。

判別式を D とすると，重解条件 $D=0$ および $D=-4k+5$ より，$-4k+5=0$　$\therefore k=\dfrac{5}{4}$

また，このときの重解を α とすると，解と係数の関係より，$2\alpha=1$　$\therefore \alpha=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，$x^2-x+k-1=0$ は $k=\dfrac{5}{4}$ のとき $0 \leq x \leq 1$ において重解をもつ。

以上より，命題が真であるための必要十分条件は $k \geq \dfrac{5}{4}$



198

線分 AB が直線 $y=(b-a)x-(3b+a)$ と共有点をもつとき，次の 2 つの場合が考えられる。

(i) 点 A，B の一方が $y>(b-a)x-(3b+a)$，他方が $y<(b-a)x-(3b+a)$ の表す領域に含まれる。

(ii) 点 A または B が $y=(b-a)x-(3b+a)$ 上の点である。

(i)のとき

点 A，B の一方が $(b-a)x-(3b+a)-y<0$ を，他方が $(b-a)x-(3b+a)-y>0$ を満たすから，$\{(b-a)\cdot -1-(3b+a)-5\}\{(b-a)\cdot 2-(3b+a)-(-1)\}<0$

よって，$(4b+5)(3a+b-1)<0$

ゆえに，（$4b+5>0$ かつ $3a+b-1<0$）または（$4b+5<0$ かつ $3a+b-1>0$）

(ii)のとき

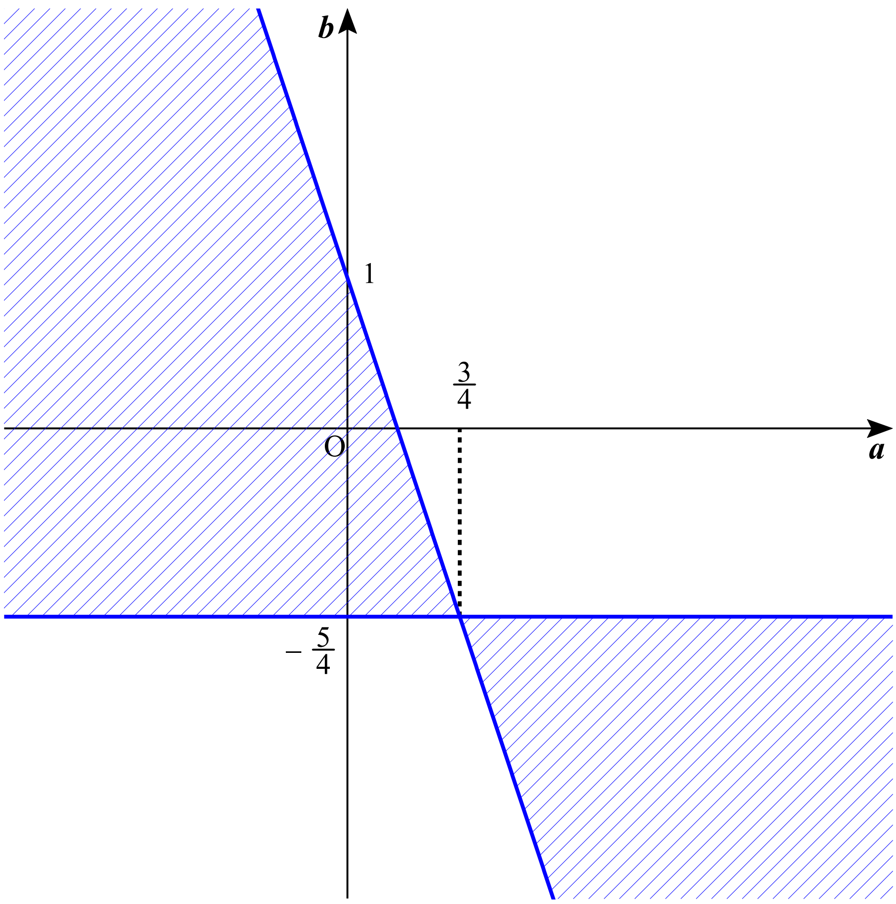
点 A，B の少なくとも一方が $(b-a)x-(3b+a)-y=0$ を満たせばよいから，

$\{(b-a)\cdot -1-(3b+a)-5\}\{(b-a)\cdot 2-(3b+a)-(-1)\}=0$　すなわち $(4b+5)(3a+b-1)=0$

よって，$4b+5=0$ または $3a+b-1=0$

(i)または(ii)より，（$4b+5\geq 0$ かつ $3a+b-1\leq 0$）または（$4b+5\leq 0$ かつ $3a+b-1\geq 0$）

すなわち（$b\geq -\dfrac{5}{4}$ かつ $b\leq -3a+1$）または（$b\leq -\dfrac{5}{4}$ かつ $b\geq -3a+1$）



例題 23

別解：垂直二等分線の通過領域と包絡線

包絡線とは

ある曲線があり，その曲線上の任意の点がある曲線群（または直線群）の接点となっているとき，その曲線を包絡線という。

包絡線の求め方の原理

・包絡線上のある点を A とすると，

点 A における包絡線の接線の傾き

＝包絡線と接する曲線群（または直線群）の点 A における接線の傾き

・包絡線上の任意の点は曲線群（または直線群）の方程式を満たす。

垂直二等分線 $t^2-2xt+4y-4=0$ の包絡線の求め方　数学Ⅲ

$t^2-2xt+4y-4=0$　・・・①　は t をパラメータとする直線群とみなせるから，

その包絡線上の点を $(x,\ y)=(x(t),\ y(t))$ とおくと，$(x(t),\ y(t))$ は①を満たす。

よって，$t^2-2tx(t)+4y(t)-4=0$　・・・②

また，$(x(t),\ y(t))$ における包絡線の接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$　・・・③

①を x で微分すると，$-2t+4\dfrac{dy}{dx}=0$　$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t}{2}$　・・・④

補足：直線の傾きが $\dfrac{t}{2}$ だから，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t}{2}$ でよい。

任意の t で③と④が等しいから，$\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{t}{2}$　$\therefore 2y'(t)=tx'(t)$　・・・⑤

②を t で微分すると，$2t-2x(t)-2tx'(t)+4y'(t)=0$　$\therefore t-x(t)-tx'(t)+2y'(t)=0$

この式に⑤を代入し，整理すると，$t-x(t)=0$　$\therefore t=x(t)$

これを②に代入し，整理すると，$-x^2(t)+4y(t)-4=0$

よって，$y(t)=\dfrac{1}{4}x^2(t)+1$

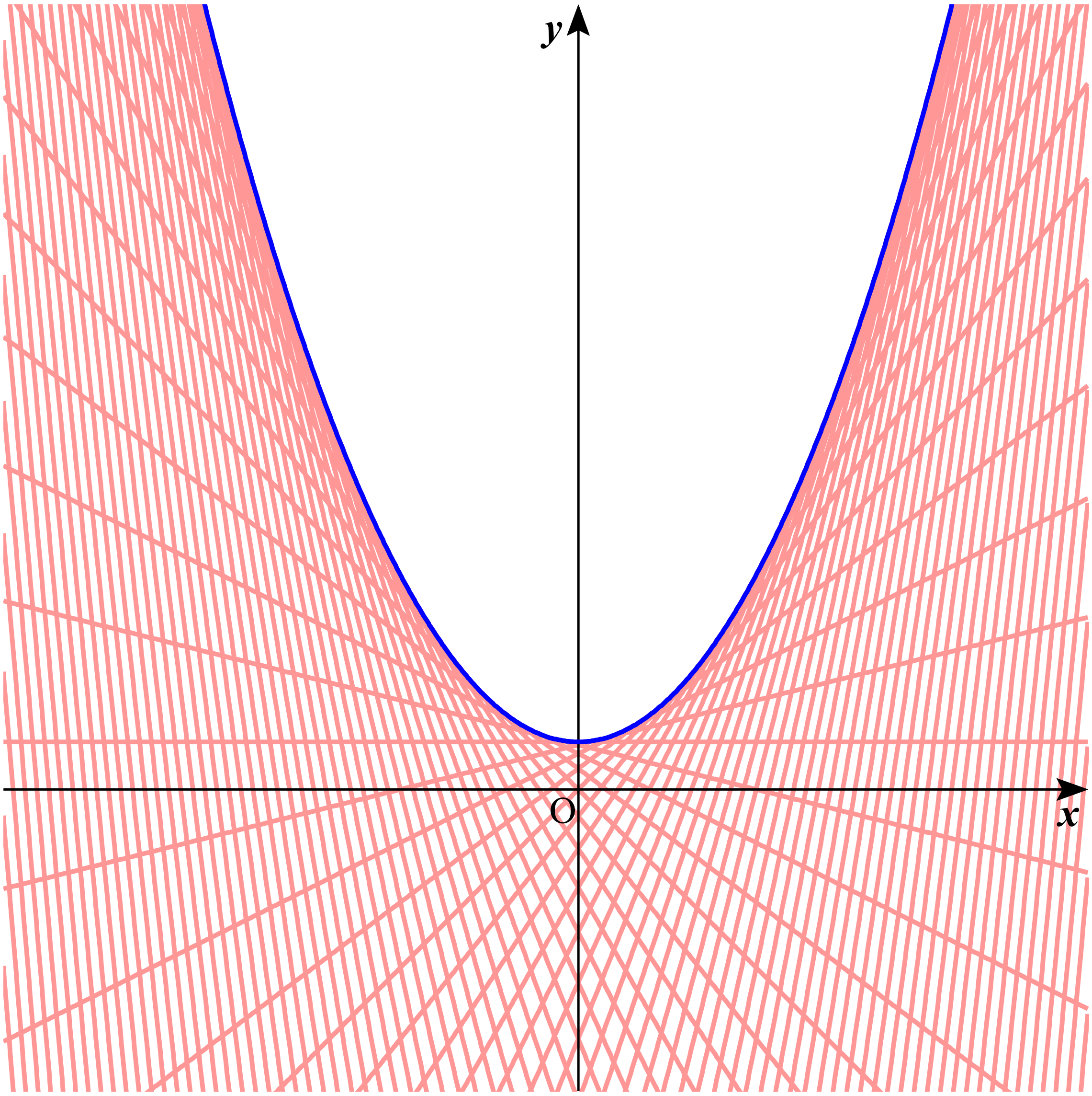
ゆえに，包絡線の方程式は $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$

また，包絡線 $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ は下に凸だから，それと接する直線群の通過領域

すなわち垂直二等分線 $t^2-2xy+4y-4=0$ の通過領域は $y\leq\dfrac{1}{4}x^2+1$ である。

赤色実線が t をパラメータとする直線群 $t^2-2xt+4y-4=0$

青色実線がその包絡線 $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$



199

(1)

$x_1=x_2$ は方程式 $x^2=-(x-a)^2+b$ すなわち $2x^2-2ax+a^2-b=0$ の解だから，

解と係数の関係より，$x_1+x_2=a,\ x_1x_2=\dfrac{a^2-b}{2}$

よって，

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2&=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=a^2-2(a^2-b)\\&=2b-a^2\end{aligned}$$

これと，$x_1-x_2=2$ より，$4=2b-a^2 \quad \therefore b=\dfrac{a^2}{2}+2$

(2)

点 P,Q は放物線 A または B 上の点だから，$(x_1,\ y_1)=(x_1,\ {x_1}^2),\ (x_2,\ y_2)=(x_2,\ {x_2}^2)$

これと，$x_1-x_2=2,\ x_1+x_2=a,\ x_1x_2=\dfrac{a^2-b}{2},\ b=\dfrac{a^2}{2}+2$ より，

よって，直線 PQ の方程式は，

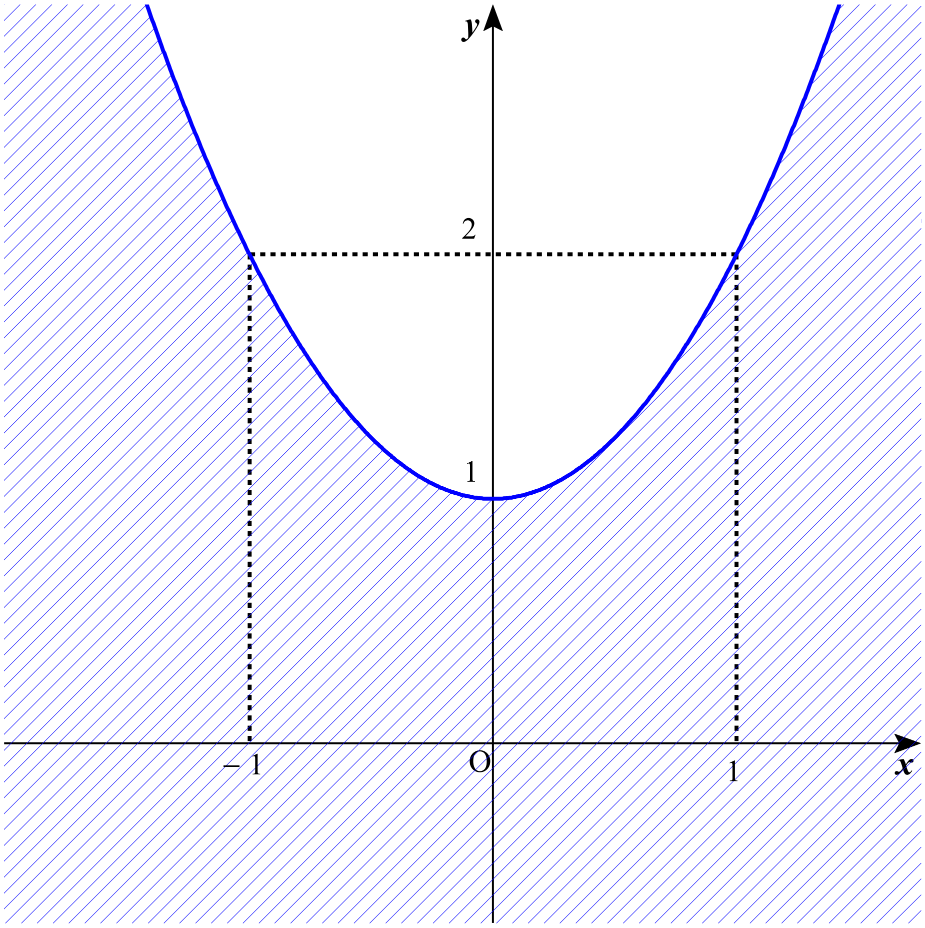
$$\begin{aligned}y&=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+y_1\\&=\frac{{x_1}^2-{x_2}^2}{x_1-x_2}(x-x_1)+{x_1}^2\\&=(x_1+x_2)(x-x_1)+{x_1}^2\\&=(x_1+x_2)x-x_1x_2\\&=ax-\frac{a^2-b}{2}\\&=ax-\frac{a^2}{4}+1\end{aligned}$$

$y=ax-\dfrac{a^2}{4}+1$ の両辺に 4 を掛け，a について整理すると，

$a^2-4xa+4y-4=0$ ・・・①

a は①を満たす実数だから，判別式を D とすると，$D\geq 0$

これと，$\dfrac{D}{4}=4x^2-4y+4=4(x^2-y+1)$ より，$x^2-y+1\geq 0 \quad \therefore y\leq x^2+1$



包絡線と絡めて解くと，以下のようになる。

a をパラメータとする直線群 $a^2-4xa+4y-4=0$ の包絡線上の点を $(x,\ y)=(x(a),\ y(a))$ とおくと，$(x(a),\ y(a))$ は $a^2-4ax(a)+4y(a)-4=0$　・・・①　を満たす。

①を a で微分すると，$2a-4x(a)-4ax'(a)+4y'(a)=0$　・・・②

$(x,\ y)=(x(a),\ y(a))$ における接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy(a)}{da}}{\frac{dx(a)}{aa}}=\dfrac{y'(a)}{x'(a)}$　・・・③

また，$a^2-4xa+4y-4=0$ から，$\dfrac{dy}{dx}=a$　・・・④

③と④より，$\dfrac{y'(a)}{x'(a)}=a$　$\therefore y'(a)=ax'(a)$　・・・⑤

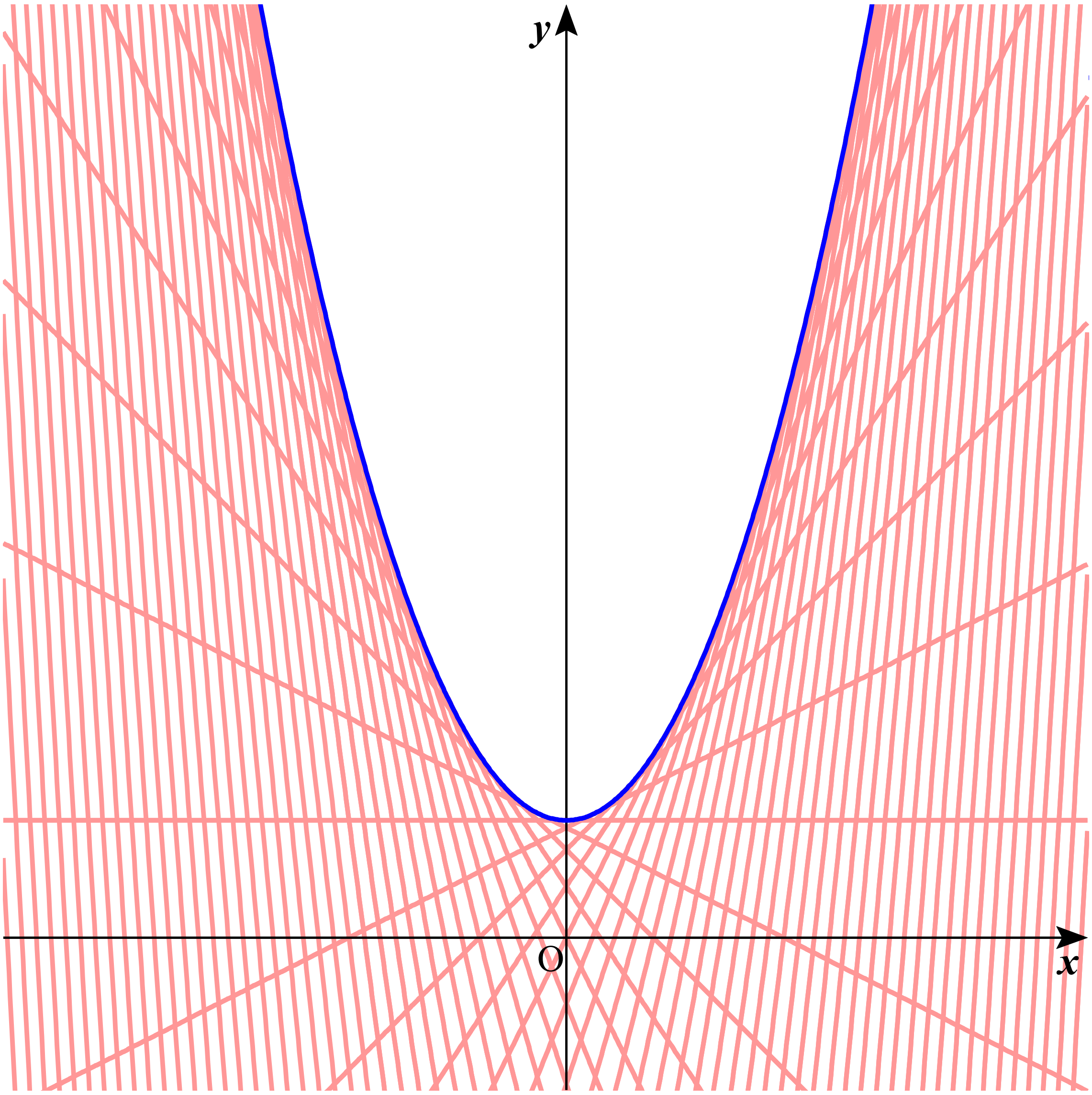
⑤を②に代入し，整理すると，$2a-4x(a)=0$　$\therefore a=2x(a)$

これを①に代入し，整理すると，$4\left(-x^2(a)+y(a)-1\right)=0$　$\therefore y(a)=x^2(a)+1$

ゆえに，直線群 $a^2-4xa+4y-4=0$ の包絡線の方程式は $y=x^2+1$

$y=x^2+1$ は下に凸だから，直線群 $a^2-4xa+4y-4=0$ の通過領域は $y\leq x^2+1$

赤色実線が a をパラメータとする直線群 $a^2 - 4ax(a) + 4y(a) - 4 = 0$
青色実線がその包絡線 $y = x^2 + 1$



200

解法 1

線分 AB 上の点を $(t,1)$ $(0 \leq t \leq 1)$ で表すと，必要十分条件は，$0 \leq t \leq 1$ において $t^2+1^2-2at-2b \cdot 1-1>0$ が，すなわち $t^2-2at-2b>0$ が成り立つことであり，

これは放物線 $y=f(t)=t^2-2at-2b$ が $0 \leq t \leq 1$ において $y=f(t)>0$ であることと同値である。

$y=f(t)=t^2-2at-2b=(t-a)^2-a^2-2b$ より，

軸 $t=a$ について，

(i) $a \leq 0$ のとき

$f(t)$ は $t=0$ で最小値 $f(0)=-2b$ をとるから，満たすべき条件は $-2b>0$ すなわち $b<0$

(ii) $0 \leq a \leq 1$ のとき

$f(t)$ は $t=a$ で最小値 $f(a)=-a^2-2b$ をとるから，満たすべき条件は $-a^2-2b>0$

すなわち $b<-\dfrac{a^2}{2}$

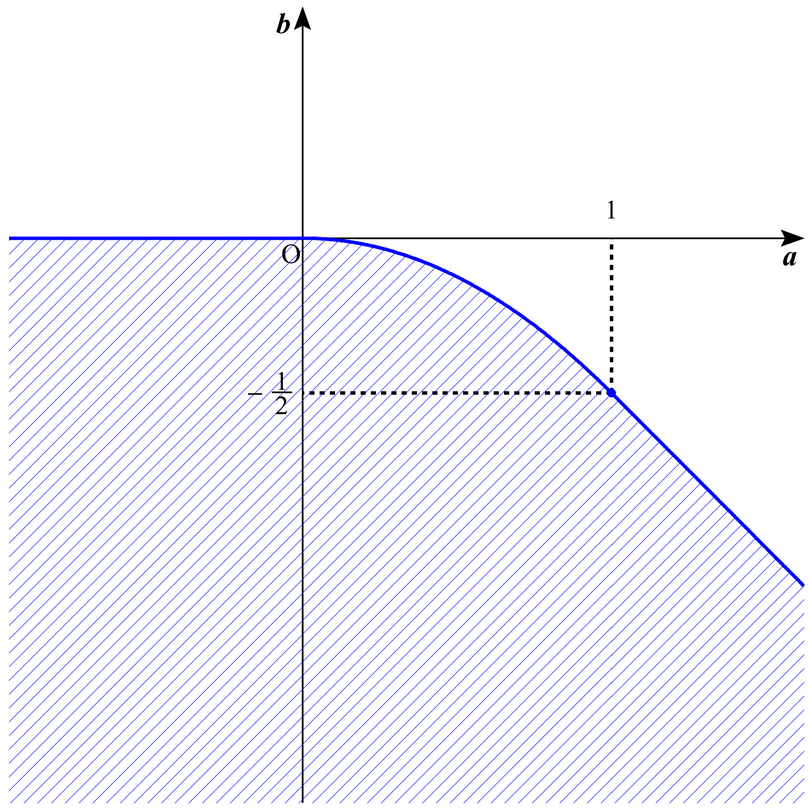
(iii) $1 \leq a$ のとき

$f(t)$ は $t=1$ で最小値 $f(1)=1-2a-2b$ をとるから，満たすべき条件は $1-2a-2b>0$

すなわち $b<-a+\dfrac{1}{2}$

(i)～(iii)を図示すると，次図のようになる。

境界線を含まない。



解法 2

$x^2+y^2-2ax-2by-1=0$ より，$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$

よって，円の中心と半径は，それぞれ $(a,\ b)$，$\sqrt{a^2+b^2+1}$

(i) $a \leq 0$ のとき

円の中心と最も近い線分 AB 上の点は A だから，

満たすべき条件は $(0-a)^2+(1-b)^2>a^2+b^2+1$　$\therefore b<0$

(ii) $0<a<1$ のとき

円の中心と最も近い線分 AB 上の点の座標は $(a,\ 1)$ だから，

満たすべき条件は $(a-a)^2+(1-b)^2>a^2+b^2+1$　$\therefore b<-\dfrac{a^2}{2}$

(iii) $1 \leq a$ のとき

円の中心と最も近い線分 AB 上の点は B だから，

満たすべき条件は $(1-a)^2+(1-b)^2>a^2+b^2+1$　$\therefore b<-a+\dfrac{1}{2}$

201

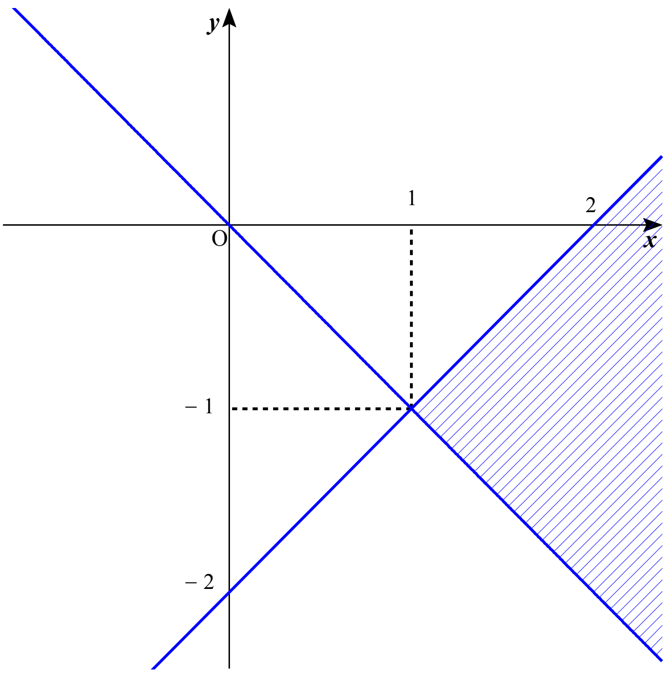
(1)

$s,\ t$ の連立方程式 $\begin{cases} s+t+1=x \\ s-t-1=y \end{cases}$ を解くことにより，$(s,\ t)=\left(\dfrac{x+y}{2},\ \dfrac{x-y-2}{2}\right)$

これと，$s \geq 0$ かつ $t \geq 0$ より，$x+y \geq 0$ かつ $x-y-2 \geq 0$

すなわち $y \geq -x$ かつ $y \leq x-2$

境界線を含む



(2)

$\begin{cases} x = st + s - t + 1 \\ y = s - t - 1 \end{cases}$ を $s,\ t$ （$s,\ t$ は実数）の連立方程式とみなすと，

$y = s - t - 1$ より，$s = t + y + 1$

これを $x = st + s - t + 1$ に代入し，t について整理すると，$t^2 - (y-1)t + x - y - 2 = 0$

t についてのこの方程式は実数解をもつから，判別式を D とすると，$D \geq 0$

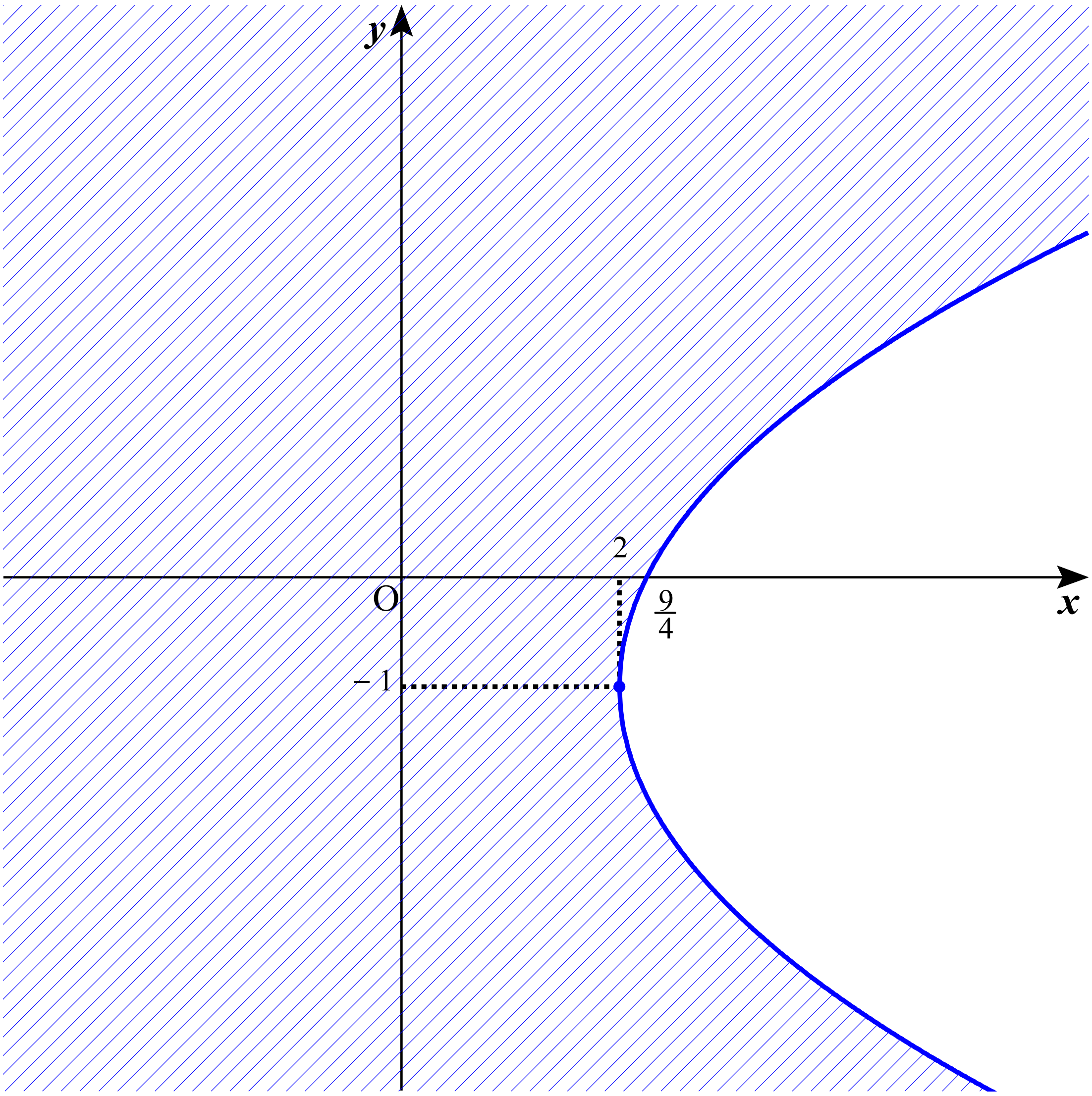
これと，$D = (y-1)^2 - 4(x - y - 2) = (y+1)^2 - 4x + 8$ より，$(y+1)^2 - 4x + 8 \geq 0$

よって，$x \leq \dfrac{1}{4}(y+1)^2 + 2$

また，このとき，連立方程式の s の解も実数となる。

ゆえに，$x \leq \dfrac{1}{4}(y+1)^2 + 2$ を座標平面内に図示すればよい。

境界線を含む



202

(1)

$y=\dfrac{t^2-(t^2-4t+2)}{t-(t-5)}(x-t)+t^2$ より，$y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}$

また，$t>t-5$ より，定義域は $t-5\leq x\leq t$

(2)

点 P の軌跡について

$(x,\ y)=(t,\ t^2)$ とおくと，$y=x^2$

また，$1\leq t\leq 3$ より，$1\leq x\leq 3$

よって，点 P は $y=x^2\ (1\leq x\leq 3)$ 上の点である。

点 Q の軌跡について

$(x,\ y)=(t-5,\ t^2-4t+2)$ とおくと，$x=t-5$ より，$t=x+5$

これを $y=t^2-4t+2$ に代入し，整理すると，$y=x^2+6x+7=(x+3)^2-2$

また，$1\leq t\leq 3$ より，$-4\leq x\leq -2$

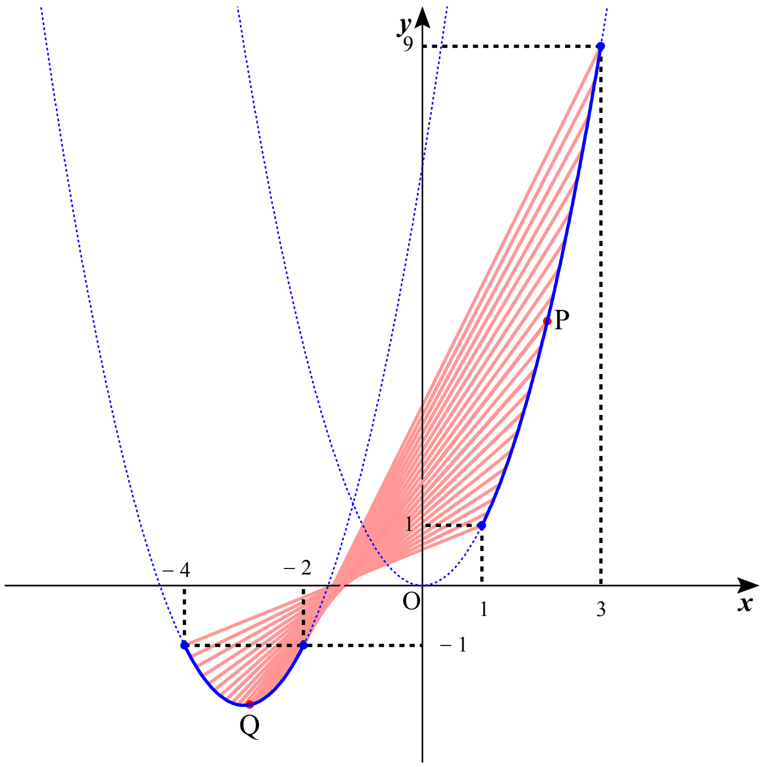
よって，点 Q は $y=(x+3)^2-2\ (-4\leq x\leq -2)$ 上の点である。

したがって，線分 PQ すなわち $y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}\ (t-5\leq x\leq t,\ 1\leq t\leq 3)$ は，

$y=(x+3)^2-2\ (-4\leq x\leq -2)$ 上の点と $y=x^2\ (1\leq x\leq 3)$ 上の点を端点とする線分群で，

その定義域 $t-5\leq x\leq t$ は $-4\leq x\leq 1$ から $-2\leq x\leq 3$ へ連続的に変化する。

よって，線分 PQ の通過領域の端点の軌跡は下図青色実線となる。



続いて，直線 PQ の通過領域を図示する。

$y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}\ (1\le t\le 3)$ の両辺に 5 を掛けて，t について整理すると，

$t^2+2(2x+1)t-2x-5y=0\ (1\le t\le 3)$

したがって，$t^2+2(2x+1)t-2x-5y=0$ が $1\le t\le 3$ において少なくとも 1 つの実数解をもつような x, y の条件を求めればよい。

すなわち，$f(t)=t^2+2(2x+1)t-2x-5y$ とすると，放物線 $f(t)$ が t 軸と，$1\le t\le 3$ の範囲で，少なくとも 1 つの共有点をもつような x, y の条件を求めればよい。

(i) $f(1)\ge 0,\ f(3)\ge 0$ のとき

$f(1)=2x-5y+3\ge 0$ より，$y\le \dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5}$　・・・①

$f(3)=5(2x-y+3)\ge 0$ より，$y\le 2x+3$　・・・②

また，$f(t)=t^2+2(2x+1)t-2x-5y=\{t+(2x+1)\}^2-4x^2-6x-5y-1$ より，

軸 $t=-2x-1$ について

$1\le -2x-1\le 3 \quad \therefore -2\le x\le -1$　・・・③

$f(-2x-1)$ について

$f(-2x-1)=-4x^2-6x-5y-1\le 0 \quad \therefore y\ge -\dfrac{4}{5}\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{1}{4}$　・・・④

よって，①～④を同時に満たす範囲を図示すればよい。

(ii) $f(1)f(3)\le 0$ のとき

$f(1)f(3)=0$ または $f(1)f(3)<0$ より，$1\le t\le 3$ の範囲で，少なくとも 1 つの共有点をもつ。

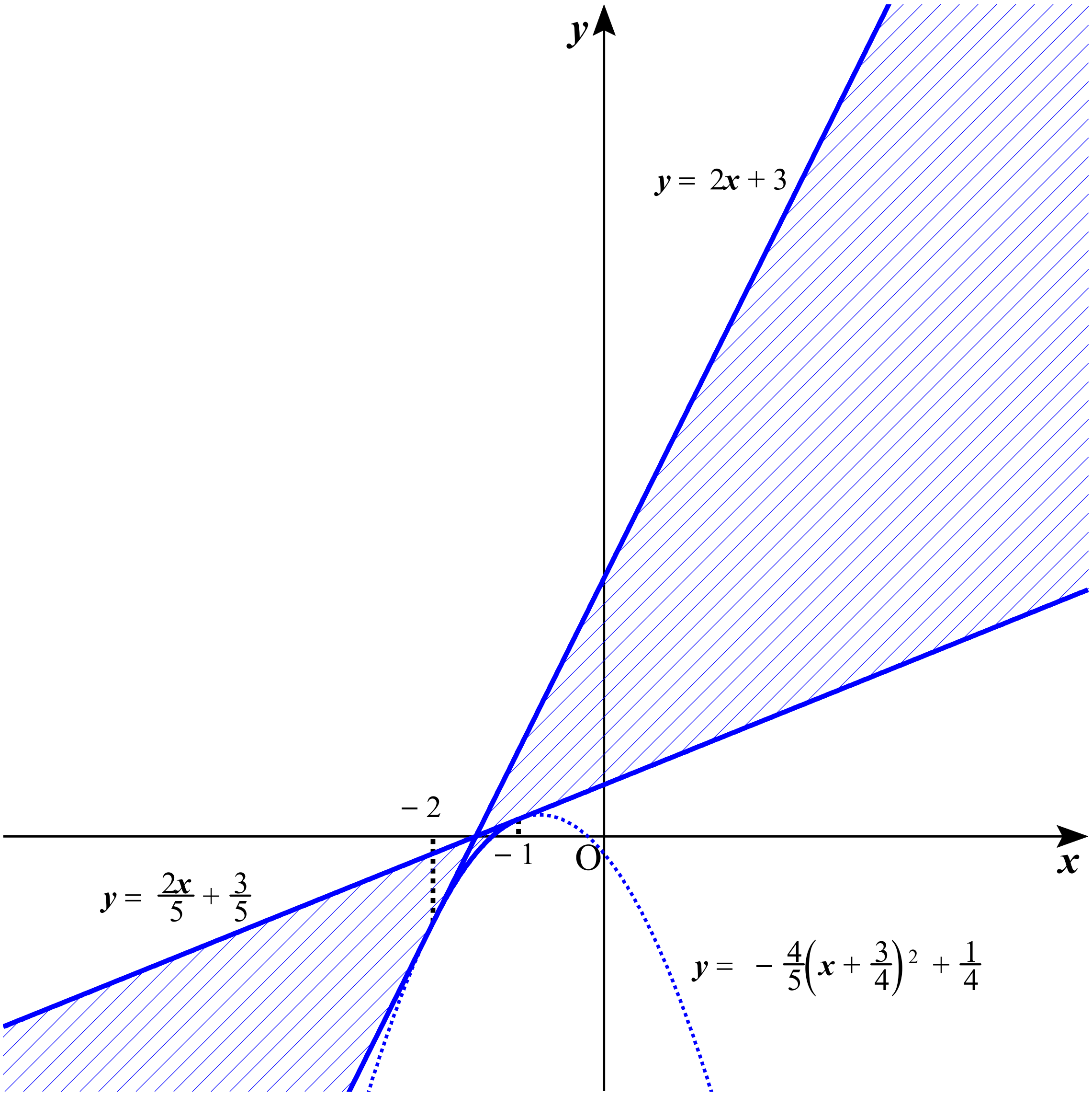
よって，図示するのは $f(1)f(3)\le 0$ すなわち $\begin{cases} y\le \dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5} \\ y\ge 2x+3 \end{cases}$ または $\begin{cases} y\ge \dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5} \\ y\le 2x+3 \end{cases}$

(iii) $f(1)<0,\ f(3)<0$ のとき

$1\le t\le 3$ の範囲に共有点をもたない。

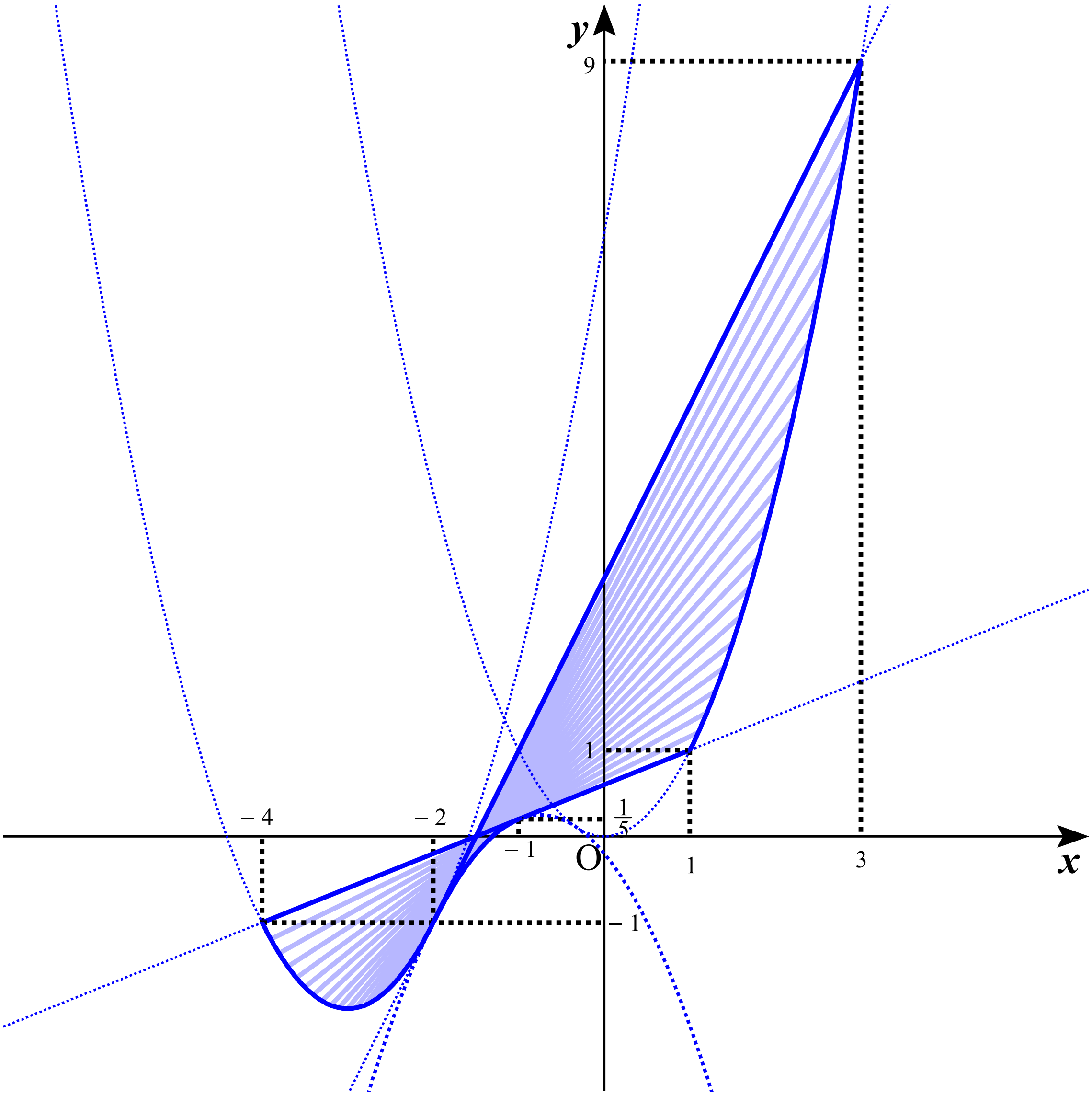
以上より，直線 PQ の通過領域は(i)と(ii)の領域を図示することにより，次図のようになる。

境界線を含む。



ゆえに，線分 PQ の端点の図と直線 PQ の通過領域の図より，
線分 PQ の通過領域は下図のようになる。

境界線を含む。



別解

t をパラメータとする直線群 $y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}$ の包絡線を $(x,\ y)=(x(t),\ y(t))$ とすると，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{4t-2}{5}\qquad \therefore y'(t)=\dfrac{4t-2}{5}x'(t)$　・・・①

$(x(t),\ y(t))$ は $y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}$ 上の点だから，$y(t)=\dfrac{4t-2}{5}x(t)+\dfrac{t^2+2t}{5}$　・・・②

②を t で微分すると，$y'(t)=\dfrac{4}{5}x(t)+\dfrac{4t-2}{5}x'(t)+\dfrac{2t+2}{5}$　・・・③

①を③に代入すると，$\dfrac{4t-2}{5}x'(t)=\dfrac{4}{5}x(t)+\dfrac{4t-2}{5}x'(t)+\dfrac{2t+2}{5}$ より，$\dfrac{4}{5}x(t)+\dfrac{2t+2}{5}=0$

これより，$x(t)=-\dfrac{t+1}{2}\qquad \therefore t=-2x(t)-1$　・・・④

④を②に代入すると，

$$\begin{aligned}y(t)&=\frac{4\{-2x(t)-1\}-2}{5}x(t)+\frac{\{-2x(t)-1\}^2+2\{-2x(t)-1\}}{5}\\&=\frac{-4x^2(t)-6x(t)-1}{5}\\&=-\frac{1}{5}\{4x^2(t)+6x(t)+1\}\end{aligned}$$

よって，包絡線の方程式は $y=-\dfrac{1}{5}(4x^2+6x+1)=-\dfrac{4}{5}\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

$1\leq t\leq 3$ のとき，直線群の傾き $\dfrac{4t-2}{5}$ の範囲は $\dfrac{2}{5}\leq\dfrac{4t-2}{5}\leq 2$ である。

これと，包絡線 $y=-\dfrac{1}{5}(4x^2+6x+1)$ 上の接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{8}{5}x-\dfrac{6}{5}$ で与えられることから，

$y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}\ (1\leq t\leq 3)$ が接する包絡線の x 座標の範囲は $\dfrac{2}{5}\leq-\dfrac{8}{5}x-\dfrac{6}{5}\leq 2$

すなわち $-2\leq x\leq -1$

よって，直線群 $y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}\ (1\leq t\leq 3)$ の包絡線は $y=-\dfrac{1}{5}(4x^2+6x+1)\ (-2\leq x\leq -1)$

これと，点 P,Q の軌跡が，それぞれ $y=x^2\ (1\leq x\leq 3)$, $y=(x+3)^2-2\ (-4\leq x\leq -2)$ であることから，線分 PQ の軌跡は前ページの図のようになる。

補足

$y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}$ の包絡線についてまとめると，

包絡線の方程式が $f(x)=-\dfrac{1}{5}\left(4x^2+6x+1\right)$

包絡線の媒介変数表示が $\left(x(t),\ y(t)\right)=\left(-\dfrac{t+1}{2},\ f(x(t))\right)$ 　ということである。

これは，

$y=f(x)=-\dfrac{1}{5}\left(4x^2+6x+1\right)$ 上の点 $\left(-\dfrac{t+1}{2},\ f\left(-\dfrac{t+1}{2}\right)\right)$ における接線の方程式が

$y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}$ ということにほかならない。